Solução da equação polinomial de grau três a graus maiores
Por Rodney Hood

O primeiro registro do interesse do ser humano por equações cúbicas data da antiga civilização babilônica, por volta de 1800-1600 a.C. Entre o material matemático que restou estão tabelas de cubos e de raízes cúbicas, bem como tabelas de valores de $n^2 + n^3$. Essas tabelas poderiam ser usadas para resolver alguns tipos especiais de cúbicas.

Por exemplo, para resolver a equação $2x^3 + 3x^2 = 540$, o que os babilônios provavelmente faziam era multiplicá-la por 4 e fazer a substituição $y = 2x$, obtendo $y^3 + 3y^2 = 2\ 160$. Assim, fazendo-se y = 3z, esta última transforma-se em $z^3 + z^2 = 80$. Consultando as tabelas, encontra-se como uma solução $z = 4$ e, portanto, $x = 6$ é a raiz da equação polinomial.

No período grego, a preocupação com volumes de sólidos geométricos levava facilmente a problemas que, na forma moderna, envolve equações cúbicas. O conhecido problema da duplicação do cubo consiste essencialmente em resolver a equação $x^3 = 2$

[Nota: O problema da duplicação do cubo é o seguinte: Dado um cubo de aresta a, pede-se construir, com régua não graduada e compasso apenas, a aresta x de um outro cubo de volume igual ao dobro do primeiro, ou melhor, é encontrar um x tal que $x^3 = 2.a^3$.]

Este problema, de solução impossível com régua e compasso apenas, foi resolvido de maneira engenhosa por Arquitas de Tarento (c. 400 a.C), usando a intersecção de um cone, um cilindro e um toro degenerado (obtido ao se girar um círculo em torno de sua tangente) (GRAESSER).

O conhecido problema poeta e matemático persa Omar Khayyam (1100 d.C) levou à frente o estudo das cúbicas por métodos essencialmente gregos. Encontrou soluções através do uso de cônicas. É característico da álgebra de seu tempo distinguir treze tipos especiais de cúbicas que admitiam raízes positivas. Por exemplo, ele resolvia equações do tipo $x^3 + b^2x = b^2c$ (onde b e c são números positivos) usando intersecções da parábola $x^2 = by$ com o círculo $y^2 = x(c-x)$, onde o círculo é tangente ao eixo da parábola no seu vértice. A raiz positiva da equação de Omar Kayyam é representada pela distância do eixo da parábola ao ponto de intersecção das curvas.

O grande avanço seguinte foi a resolução algébrica das cúbicas. Essa descoberta, um produto do renascimento italiano, está cercada de mistério – a história ainda não a esclareceu (CARDANO, p.ix-xii; FELDMAN (a)). O método apareceu publicado em 1545, no *Ars magna*, de Girolamo Cardano de Milão, um médico, astrólogo, matemático, escritor prolífico, suspeito de heresia, enfim umas das figuras mais interessantes de seu tempo.

O método ficou conhecido como “fórmula de Cardano”. Segundo Cardano, porém, o mérito da fórmula deve-se a Scipione del Ferro, um professor de matemática da Universidade de Bolonha, que em 1515 descobriu com resolver cúbicas do tipo $x^3 + bx = c$. Como era costume entre os matemáticos da época, del Ferr manteve seu método em segredo, a fim de tirar vantagem dele em duelos ou torneios matemáticos. Quando ele morreu, em 1526, as únicas pessoas que conheciam seu trabalho eram seu genro e um aluno seu, de nome Antonio Fior de Veneza.

Em 1535 Fior desafiou o iminente matemático Niccolo Tartaglia de Brescia (então ensinando em Veneza) para um debate, pois não acreditava que este último tivesse descoberto a fórmula de resolução das cúbicas do tipo $x^3 + bx^2 = c$, como proclamava. Alguns dias antes do debate, Tartaglia empenhou-se em descobrir também como resolver cúbicas do tipo $x^3 + ax = c$, uma descoberta (segundo ele) que lhe ocorreu num lampejo, na noite de 12 para 13 de fevereiro de 1535. É desnecessário dizer que, como Tartaglia era capaz de resolver dois tipos de cúbicas ao passo que Fior só podia resolver um, Tartaglia ganhou o debate.

Cardano, ouvindo falar da vitória de Tartaglia, ficou ansioso por aprender seu método. Tartaglia conseguiu evitar sua aproximação e só quatro anos mais tarde houve um encontro entre eles. Tartaglia, então, expôs seu método, fazendo Cardano jurar segredo e, especialmente, proibindo-o de publicá-lo. Esse julgamento deve ter sido exasperante para Cardano. Numa visita a Bolonha, vários anos depois, ele encontrou o genro de del Ferro, e ficou sabendo assim a solução anterior deste último. Sentindo, talvez, que esse conhecimento o desobrigava de sua promessa a Tartaglia, Cardano publicou sua versão do método no *Ars magna*. Esta atitude provocou um amargo ataque de Tartaglia, que proclamou ter sido traído.

Ainda que oculto sob uma linguagem geométrica, o método é algébrico e o estilo sincopado. Cardano dá como exemplo a equação $x^3 + 6x = 20$ e procura as quantidades incógnitas p e q cuja diferença seja o termo constante 20 e cujo produto seja o cubo de 1/3 do coeficiente de x, 8. Uma solução é fornecida então pela diferença das raízes cúbicas de p e q. Para este exemplo a solução é

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}$$

Este procedimento facilmente se aplica a uma cúbica geral após ter sido transformada para remoção do termo x^2.

Essa descoberta deixou sem resposta questões como: o que fazer com as raízes negativas e imaginárias? E (uma questão correlata) sempre existem três raízes? O que fazer (no chamado caso irredutível) quando o método de Cardano produz expressões aparentemente imaginárias como

$$\sqrt[3]{81+30\sqrt{-3}}+\sqrt[3]{81-30\sqrt{-3}}$$

Para a raiz real, -6, da cúbica $x^3 - 63x^2 - 162 = 0$? Essas questões só foram resolvidas em 1732 através de Leonhard Euler.

A equação geral quártica levou a métodos de caráter semelhante; e sua soluça, também, apareceu no *Ars magna*. O responsável por este resultado foi Ludovico Ferrari, um aluno de Cardano. Ferrari, quando ainda adolescente, resolveu um problema intrigante, que seu professor não conseguia resolver.

Sua solução pode ser descrita assim. Primeiro reduz-se a quártica a uma equação desprovida do termo em x^3, a seguir rearranjam-se os termos e soma-se uma quantidade conveniente (com coeficientes indeterminados) a ambos os membros de modo que o primeiro membro seja um quadrado perfeito. O coeficientes indeterminados são então determinados de maneira que o segundo membro seja também um quadrado, o que exige que seu discriminante seja nulo. Esta condição leva então a uma cúbica, que pode agora ser resolvida – pode-se facilmente lidar com a quártica.

Esforços posteriores para resolver a quártica e outras equações estavam fadados ao fracasso, mas isso só foi reconhecido no século XIX. Carl Friedrich Gauss provou em 1799 que toda equação algébrica de grau n sobre o corpo dos números reais admite uma raiz (e, portanto n raízes) no corpo dos complexos [O que Gauss provou foi o Teorema Fundamental da Álgebra]. O problema era expressar essas raízes em função dos coeficientes por radicais. Paolo Ruffini, um professor de matemática e medicina em Modena, deu (em 1813) essencialmente satisfatória da impossibilidade de se chegar a essa expressão equações de grau maior que quatro. Mias bem conhecido é o trabalho do brilhante jovem matemático norueguês, Niels Henrik Abel. Depois de achar que tinha resolvido a quíntica, Abel descobriu seu erro, e em 1824 publicou à sua própria custa (em Christiana, hoje Oslo) a prova dessa impossibilidade. Seu resultado foi publicado também, dois anos mais tarde, no primeiro volume do *Jornal de Crelle* (Berlim), ajudando assim a inaugurar com alto nível um dos maiores periódicos de matemática do mundo. O trabalho de Abel, por sua vez, estimulou o jovem francês Évariste Galois (1811-1832), que antes de sua morte precoce num duelo mostrou que toda equação pode ser associada a um grupo característico e que as propriedades desse grupo podem ser usadas para determinar se a equação é resolúvel por radicais ou não.

Nota: Este artigo foi extraído de Baungart, J. K. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, vol. 4, Álgebra*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

Bibliografia citada no texto

CARDANO, Girolamo. *The Great Art or the rules of Algebra* (*Ars magna*). Traduzida para o inglês e editada por T. Richard Witmer. Cambrigde, Mas.: M.I.T, Press, 1968.

FELDMAN, Richard W., Jr. (a). “The Cardano-Tartaglia Dispute”, *Mathematics Teacher*, LIV (março de 1961), p. 160-3.

GRAESSER, R. F. “Archytas’ Duplication of the Cube”, *Mathematics Teacher*, XLIX (maio de 1956), p.393.95.

Leituras Suplementares (Sugeridas pelo autor do texto)

MIDONICK, Henrieta O., ed. *The Treasury of Mathematics*. Nova York: Philosophical Library, 1965.

BOYER, C. B. (c). *A history of mathematics*. Nova York: John Wiley & Sons, 1968.

COOLIDGE, Julian Lowel. (b). *The Mathematics of Great Amateurs*. 1949. Nova York: Dover publications.

EVES, H. (b). An Introduction to the History of Mathematics (ed. rev.). Nova York: Holt, Rinehart & Winston, 1964.

NEUGEBAUER, O. The Exact Sciences in Antiguity (2. ed.). Providence, R. I.: Brown University Press, 1957; \nova York: Harper & Bros., Harper Torchbooks ("Science Library"), 1962.

ORE, Oystein. (a). *Cardano, the Gambling Scholar*. 1953. Nova York: Dover Publications.
ORE, Oystein. *Niels Henrik Abel, Mathematician Extraordinary.* Minneapolis University Minnesota Press, 1957.

SMITH, D. E. (a). History of Mathematics. 2 vols. 1923, 1925. Nova York: Dover Publications, 1958.

STRUIK, Dirk J. A Source Book in Mathematics, 1200-1800. Cambridge, Mass.: Harvard university Press, 1969.
YOUNG, Jacob Willian Albert. ed. *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to the Elementary Field*, 1911. Nova York: Dover Publications, 1951.