Números complexos – A história de $\sqrt{-1}$

Por Eugene W. Hellmich

A história mostra a necessidade da invenção de novos números no progresso ordenado da civilização e na evolução da matemática. A história de $\sqrt{-1}$, a unidade imaginária, e de $x + y.i$, o número complexo, origina-se no desenvolvimento lógico da teoria algébrica.

Deplorar o uso da palavra "imaginário" chamando de "grande desgraça algébrica", mas "demasiado estabelecida para que os matemáticos a erradiquem" é próprio do ponto de vista moderno; mas o uso dessa palavra reflete a natureza enganadora do conceito para matemáticos que viveram séculos atrás.

Antigamente, considerar a raiz quadrada de um número negativo invariavelmente provocava rejeição. Parecia óbvio que um número negativo não fosse um quadrado, concluíndo-se daí que tais raízes quadradas não tinham nenhum significado. Esta atitude prevaleceu por muito tempo.

Talvez a mais antiga menção a uma raiz quadrada de um número negativo seja a expressão $\sqrt{81-144}$, que aparece na *Stereometrica*, de Heron de Alexandria (cerca de 50 d.C); o próximo registro é a tentativa de Diofanto de resolver a equação $36x^2 + 24 = 172x$ (como escreveríamos hoje), em cuja solução aparece a quantidade $\sqrt{1849-2016}$ (novamente usando notação moderna).

A primeira expressão clara de dificuldades com a raiz quadrada de um número negativo foi manifestada, na Índia, por Mahavira (c. 850 d.C), que escreveu: "Como na natureza das coisas, um negativo não é um quadrado, não admite raiz quadrada". Nicolas Chuquet (1484) e Luca Paccioli (1494) na Europa estavam entre os que continuavam a rejeitar os imaginários.

Atribui-se a Girolamo Cardano o crédito de algum progresso ao introduzir números complexos na solução da equação cúbica, ainda que os considerasse "fictícios". Também a ele credita-se o primeiro uso da raiz quadrada de um número negativo ao resolver o problema: "Dividir 10 em duas partes tais que o produto ... seja 40". De início, Cardano declarou ser manifestamente impossível uma solução. Depois, no entanto, com espírito propriamente audaz, ele continuou: "Não obstante, operaremos". (isto se devia, sem dúvida, à sua formação médica!) Assim ele encontrou $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ e mostrou que estes dois números de fato têm soma 10 e produto 40.

Cardano conclui dizendo que essas quantidades são "verdadeiramente sofisticadas" e que continuar trabalhando com elas seria "tão sutil quanto inútil".

Cardano não usava o símbolo $\sqrt{-15}$. Sua designação era $R_x \cdot m$, isto é, *radix minus* para a raiz quadrada de um número negativo. Rafael Bombelli (c. 1500) usava "$d \cdot m$" para nosso $\sqrt{-1}$. Albert Girard (1637) introduziu simbolismos tais como "$\sqrt{-2}$". René Descartes (1637) contribuiu com os termos "real" e "imaginário". Leonhard Euler (1748) usava "i" para $\sqrt{-1}$. Caspar Wessel usava "$\sqrt{-1}=\varepsilon$". Carl Friedrich Gauss (1832) introduziu o termo "número complexo". Willian Rowan Hamilton expressou os números complexos sob a forma de par ordenado.

Bombelli deu seguimento ao trabalho de Cardano. A partir da equação $x^2+a=0$, ele falava de "$+\sqrt{-a}$" e "$-\sqrt{-a}$". O caso particular da equação $x^2+1=0$ propicia uma excelente maneira de se chegar ao i e ao i^2, da seguinte forma:

Se $x^2+1=0$, então $x^2 = -1$ e $x^2 = \pm\sqrt{-1}$. Agora, se $i=\sqrt{-1}$, então $i^2 + 1 = 0$ quando x é substituído por i, e $i^2 = -1$. Disto segue-se, como um bom exercício, que $i^3 = -\sqrt{-1},\ \ i^4 = 1,\ i^5 = \sqrt{-1},...,\ i^{243} = -\sqrt{-1}$ e assim por diante.

Em sua *Algebra* (1673, republicada em 1693 na *Opera mathematica*) John Wallis associou "-1600 'square perches'" com uma perda e depois supôs isto na forma de um quadrado um lado [1600 "square perches" = 40,47 ares].

Qual será este lado? Não podemos dizer que é 40, nem que é -40 (porque esses dois números multiplicados por si mesmos resultam +1600, e não -1600) Mas, antes, que é $\sqrt{-1600}$ (A suposta Raiz de um Quadrado Negativo:) ou (o que é equivalente a isso) $10\sqrt{-16}$ *ou* $20\sqrt{-4}$, *ou* $40\sqrt{-1}$.

Wallis, Wessel (1798), Jean Robert Argand (1806), Gauss (1813) e outros fizeram contribuições significativas para a compreensão dos números complexos através de representação gráfica, e em 1831 Gauss definiu números complexos como pares ordenados de números reais para os quais *(a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)* e assim por diante. A representação de Wessel é dada como se segue (Smith (b), I, p.60):

Designaremos por +1 a unidade positiva retilínea e $+\varepsilon$ uma certa outra unidade perpendicular à unidade positiva e tendo a mesma origem; então, o ângulo de direção de +1 será igual a 0°, o de -1 a 180º, o de $+\varepsilon$ a 90º e o de $-\varepsilon$ a -90º ou 270º. Pela regra de que o **ângulo de direção do produto é igual à soma dos ângulos dos fatores**, temos:

(+1).(+1) = +1,
(+1).(-1) = -1,
(-1).(-1) = +1,
(+1).($+\varepsilon$) = $+\varepsilon$,
(+1).($-\varepsilon$) = $-\varepsilon$,
($+\varepsilon$).($+\varepsilon$) = -1,
(-1).($-\varepsilon$) = $+\varepsilon$,
($+\varepsilon$).($-\varepsilon$) = +1,
($-\varepsilon$).($-\varepsilon$) = -1.

A partir disso, vê-se que ε é igual a $\sqrt{-1}$, e a divergência do produto é determinada de maneira que nenhuma das regras comuns da operação seja contrariada.

De uma representação semelhante foi dito (BELL (b), p.234):

Tudo isso, naturalmente, nada prova. *Não há nada a ser provado; atribuímos aos símbolos e operações da álgebra elementar qualquer significado, seja qual for*, que leve à consistência. Ainda que a *interpretação*... nada prove, pode sugerir que não há razão para alguém se embaraçar num estado de místico assombro por nada sobre a grosseira designação errada "imaginária".

Uma representação geométrica creditada a Wessel e Argand, independentemente, baseia no resultado da geometria segundo o qual a altura de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa é a média dos segmentos em que divide esta última. Na figura 1,

$OD_1 = d_1 = +1$, $OD_2 = d_2 = -1$, $\angle D_1RD_2$ é um ângulo reto e OR = d. Então, $\frac{d_1}{d} = \frac{d}{d_2}$.

Logo, $d = \sqrt{d_1.d_2}$, ou seja, $d = \sqrt{(+1).(-1)} = \sqrt{-1} = i$.

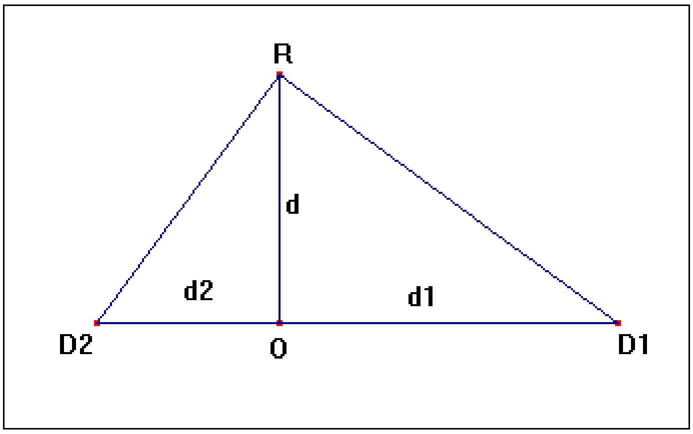

Fig. 1

Algumas demonstrações geométricas interessantes podem resultar da representação de um número *a* + *bi* pelo ponto do plano de coordenadas *a* e *b*. Um exemplo é a prova de que o ponto médio da hipotenusa de um triângulo retângulo é eqüidistante dos três vértices. Na figura 2, O é o vértice do ângulo reto do triângulo retângulo AOB e C é o ponto médio da hipotenusa AB. Usando as coordenadas da figura,

$$OC = \left|\frac{1}{2}(a+bi)-0\right| = \frac{1}{2}|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} \ ,$$

e

$$AB = |a-bi| = \sqrt{a^2+b^2} \ .$$

Daí:

$$OC = \frac{1}{2}AB = BC = CA$$

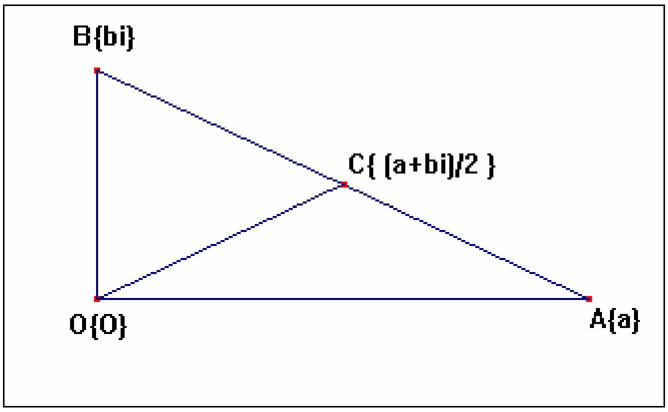

Fig. 2

Finalmente, entre as mais valiosas relações envolvendo imaginários, está aquela proposta por Abraham De Moivre (1730):

$(\cos\theta + i.sen)^n = \cos n\theta + i.sen\, n\theta$

Segue-se uma ilustração da relação de De Moivre sobre o desenvolvimento de identidades trigonométricas (JONES):

(1) $$(\cos\theta + i.sen\,\theta)^3 = \boxed{\cos 3\theta + i.sen\, 3\theta}$$

Mas, pelo Teorema Binomial, temos

(2) $$(\cos\theta + i.sen)^3 = \cos^3 n\theta + 3i.\cos^2\theta.sen\theta + 3i^2.\cos\theta.sen^2\theta + i^3 sen^3\theta$$

ou

$$(\cos\theta + i.sen)^3 = \boxed{\cos^3 n\theta + 3i.\cos^2\theta.sen\theta - 3\cos\theta.sen^2\theta - isen^3\theta}$$

Igualando os segundos membros de (1) e (2), obtemos

$$cos3\theta + isen\theta = cos^3\theta - 3cos\theta sen^2\theta + i(3cos^2\theta sen\theta - sen^3\theta)\,.$$

Agora, igualando as partes reais, temos

$$cos3\theta = cos^3\theta - 3cos\theta sen^2\theta\,.$$

E igualando as partes imaginárias, temos

$$sen3\theta = 3cos^2\theta sen\theta - sen^3\theta\,.$$

Nota: Este artigo foi extraído de Baungart, J. K. *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula, vol. 4, Álgebra*. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

Bibliografia citada no texto

Bell, E. T. (a). The Development of Mathematics (2ª ed.). Nova York: McGraw-Hill Book Co., 1945.
Smith, D. E. (b). A Source Book en Mathematics. 1929. Reimpressão (2 vols). Nova York: Dover Publications, 1959.

Leituras Suplementares (Sugeridas pelo autor do texto)

Bell, E. T. (b). *Men of Mathematics*. Nova York: Simon &Schuster, 1937.
Jones, Phillip S. "Complex Numbers: An Example of recurring Themes in the Development of Mathematics" – I-III, *Mathematics Teacher*, XLVII (fevereiro, abril, maio de 1954), 106-14, 257-63,340-45.
Midonick, Henrieta O., ed. *The Treasury of Mathematics*. Nova York: Philosophical Library, 1965.
Smith, D. E. (a). History of Mathematics. 2 vols. 1923, 1925. Nova York: Dover Publications, 1958.
Smith, D. E. (b). A Source Book en Mathematics. 1929. Reimpressão (2 vols). Nova York: Dover Publications, 1959.