Contextos, aplicações, interdisciplinaridade

Uma seção para você ligar a Matemática à realidade da vida e da sociedade

Do módulo 89 ao módulo 94, você estudou matrizes e deve estar se perguntando para que elas servem.
As matrizes sempre chamaram a atenção do homem, desde os tempos do quadrado mágico da China antiga:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Quem já não ouviu falar dele? Um quadrado cuja soma dos elementos de qualquer linha, coluna ou diagonal vale sempre o mesmo número: 15, por exemplo.
Matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares (estes dois últimos tópicos você vai ver logo adiante, do módulo 95 ao módulo 101) fazem parte de uma mesma teoria que há séculos vem ajudando a humanidade a resolver problemas, dos sábios chineses e hindus da Antiguidade, passando pelos matemáticos japoneses e europeus dos séculos XVII, XVIII e XIX – Seki Kowa, Leibnitz, Vandermonde, Lagrange, Gauss, Cauchy, Bézout, Cramer, Cayley, Pierce, Hamilton, Sylvester e muitos outros – até chegar aos cientistas de nosso século. O desenvolvimento dos computadores é uma prova irrefutável disso.
Como exemplos, são apresentados a seguir dois problemas simples com aplicação de matrizes: o estoque de uma rede de livrarias e o de médias escolares.

SAIBA COMO CALCULAR O ESTOQUE DE UMA REDE DE LIVRARIAS

Nas lojas **A**, **B**, **C** e **D** de uma rede de livrarias o estoque de seus livros didáticos de Matemática $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ e $\mathbf{M_3}$ é o seguinte:

Livraria	M_1	M_2	M_3
A	10	120	80
B	20	15	48
C	5	40	30
D	15	10	54

Esse estoque (**E**) pode ser representado por uma matriz em que: cada linha é formada pelos estoques dos livros de Matemática de uma determinada livraria; e cada coluna é formada pelos estoques de um determinado livro de Matemática em cada livraria.

$$E = \begin{bmatrix} 10 & 120 & 80 \\ 20 & 15 & 48 \\ 5 & 40 & 30 \\ 15 & 10 & 54 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o elemento $a_{12} = 120$, por exemplo, representa o número de exemplares que a livraria **A** possui do livro de Matemática $\mathbf{M_2}$.

Suponha agora que foi feita uma entrega para essas livrarias com as seguintes quantidades de cada um dos livros de Matemática:

Livraria	M_1	M_2	M_3
A	30	0	10
B	10	35	12
C	15	40	20
D	20	70	16

Essa entrega pode ser representada pela matriz **F**:

$$F = \begin{bmatrix} 30 & 0 & 10 \\ 10 & 35 & 12 \\ 15 & 40 & 20 \\ 20 & 70 & 16 \end{bmatrix}$$

O estoque atualizado da rede de livrarias depois da entrega pode ser representado pela matriz **A**, tal que A = E + F, isto é:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 120 & 80 \\ 20 & 15 & 48 \\ 5 & 40 & 30 \\ 15 & 10 & 54 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 0 & 10 \\ 10 & 35 & 12 \\ 15 & 40 & 20 \\ 20 & 70 & 16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & 120 & 90 \\ 30 & 50 & 60 \\ 20 & 80 & 50 \\ 35 & 80 & 70 \end{bmatrix}$$

Se a tabela de preços desses livros informar que $\mathbf{M_1}$ custa R$ 40,00, $\mathbf{M_2}$ custa R$ 50,00 e $\mathbf{M_3}$ custa R$ 60,00, então estes preços também podem ser representados por uma matriz, a matriz **P**:

$$P = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$$

O valor do estoque nas quatro lojas pode ser representado pela matriz **V** e ser obtido da seguinte maneira: V = AP.

Assim:

$$V = A \cdot P = \begin{bmatrix} 40 & 120 & 90 \\ 30 & 50 & 60 \\ 20 & 80 & 50 \\ 35 & 80 & 70 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 40 \cdot 40 + 120 \cdot 50 + 90 \cdot 60 \\ 30 \cdot 40 + 50 \cdot 50 + 60 \cdot 60 \\ 20 \cdot 40 + 80 \cdot 50 + 50 \cdot 60 \\ 35 \cdot 40 + 80 \cdot 50 + 70 \cdot 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13\,000 \\ 7\,300 \\ 7\,800 \\ 9\,600 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, podemos afirmar que a loja **A** tem um estoque no valor de R$ 13 000,00, a loja **B** no valor de R$ 7 300,00, etc.

SAIBA COMO CALCULAR SUAS MÉDIAS

Tome como exemplo o boletim de um aluno com as seguintes notas:

Matérias	Notas		
	1ª etapa	2ª etapa	3ª etapa
Português	6	8	9
Matemática	4	7	5
Física	4	8	9
Química	8	7	6
Estudos Sociais	10	8	9

As notas desse boletim podem ser representadas por uma matriz cujas linhas são as matérias — Português, Matemática, Física, Química e Estudos Sociais — e as colunas as três etapas do curso — 1ª etapa, 2ª etapa e 3ª etapa.

Assim, temos:

$$N = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 6 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

onde, por exemplo, $a_{23} = 5$ (2ª linha e 3ª coluna), ou seja, 5 é a nota de Matemática desse aluno na 3ª etapa.

Se nessa escola a média das notas é ponderada e os pesos forem 1 na 1ª etapa, 2 na 2ª etapa e 3 na 3ª etapa, esses pesos poderão ser representados por uma matriz coluna, onde as linhas são os pesos nas respectivas etapas.

$$P = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A média ponderada de cada matéria nas três etapas pode ser calculada pelo produto N · P.

$$N \cdot P = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & 5 \\ 4 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 6 \\ 10 & 8 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \\ 4 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \\ 8 \cdot 1 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \\ 10 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 49 \\ 33 \\ 47 \\ 40 \\ 53 \end{bmatrix}$$

Isto é, as notas finais do aluno serão 49 em Português, 33 em Matemática, 47 em Física, 40 em Química e 53 em Estudos Sociais.

Contextos, aplicações, interdisciplinaridade

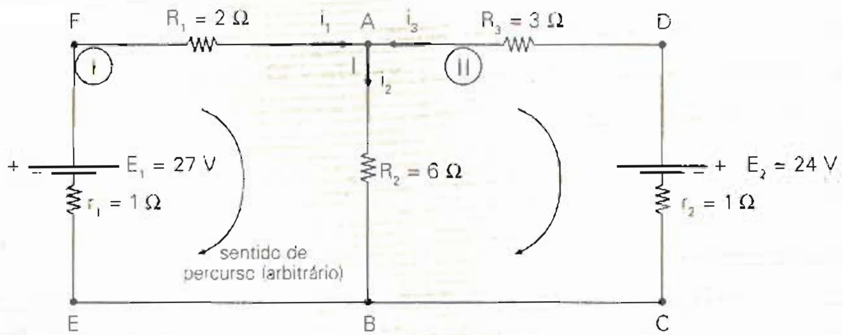
Uma seção para você ligar a Matemática à realidade da vida e da sociedade

No módulo 97, vimos o que são sistemas lineares e que a eles podem-se associar matrizes, uma ferramenta matemática que já foi apresentada a você no módulo 88. O texto a seguir mostra dois problemas cuja solução depende do conhecimento de matrizes e sistemas lineares. O primeiro apresenta um cálculo de correntes elétricas e o segundo é semelhante ao problema de controle de estoque de uma livraria que foi visto logo após o módulo 94, só que desta vez o que se quer saber é o preço dos livros.

MATRIZES, SISTEMAS LINEARES, ELETRICIDADE E LIVROS

No exemplo 1 vamos calcular as correntes de um circuito elétrico usando os conceitos matemáticos de matrizes e sistemas lineares. No exemplo 2, vamos calcular os preços de três livros de Matemática de uma determinada livraria com sede e duas filiais e novamente esses conceitos devem ser usados.

Exemplo 1



Esse circuito possui:

- dois geradores de forças eletromotrizes (fem) $E_1 = 27$ V e $E_2 = 24$ V e resistências internas $r_1 = 1\ \Omega$ e $r_2 = 1\ \Omega$;
- três resistores: $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 6\ \Omega$ e $R_3 = 3\ \Omega$.

Observação: A unidade de medida de fem é o *volt* (**V**); a unidade de medida de resistência elétrica é o *ohm* (Ω).

Resolver um circuito elétrico significa determinar as intensidades das correntes elétricas que nele circulam; a unidade de medida da corrente elétrica é o *ampère* (**A**).

Nesse circuito, temos três correntes, representadas por $\mathbf{i_1}$, $\mathbf{i_2}$ e $\mathbf{i_3}$.

Para calcular suas intensidades, vamos montar o sistema a seguir, que resulta da aplicação das *1ª e 2ª leis de Kirchhoff* no circuito da figura acima.

Observação: Essas leis são vistas detalhadamente no estudo de Eletrodinâmica, que pertence à Física.

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 3i_1 + 6i_2 = 27 \\ -6i_2 - 4i_3 = -24 \end{cases}$$

Aplicando a regra de Cramer, temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -54 \qquad D_{i_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 27 & 6 & 0 \\ -24 & -6 & -4 \end{vmatrix} = -126$$

$$D_{i_2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 27 & 0 \\ 0 & -24 & -4 \end{vmatrix} = -180 \qquad D_{i_3} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 6 & 27 \\ 0 & -6 & -24 \end{vmatrix} = -54$$

Assim:

$$i_1 = \frac{D_{i_1}}{D} = \frac{-126}{-54} \Rightarrow \boxed{i_1 = \frac{7}{3}\ A},\ i_2 = \frac{D_{i_2}}{D} = \frac{-180}{-54} \Rightarrow \boxed{i_2 = \frac{10}{3}\ A} \text{ e } i_3 = \frac{D_{i_3}}{D} = \frac{-54}{-54} \Rightarrow \boxed{i_3 = 1\ A}$$

Logo, as correntes do circuito são $i_1 = \frac{7}{3}$ A, $i_2 = \frac{10}{3}$ A e $i_3 = 1$ A.

Exemplo 2

Uma coleção de livros de Matemática para o ensino médio é representada por três livros:

- $\mathbf{M_1}$ é o do 1º ano;
- $\mathbf{M_2}$ o do 2º ano;
- $\mathbf{M_3}$ o do 3º ano.

As livrarias **A**, **B** e **C**, em um relatório sobre as vendas diárias, apresentaram os seguintes resultados num determinado dia:

Livraria	Total de vendas	Valor total recebido
A	$1M_1$ $2M_2$ $3M_3$	R$ 111,00
B	$2M_1$ $1M_2$ $2M_3$	R$ 88,00
C	$3M_1$ $2M_2$ $5M_3$	R$ 181,00

Com base nesse relatório, determine os preços dos livros $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$ e $\mathbf{M_3}$.

Solução:

Se $\mathbf{M_1}$ custar **x** reais, $\mathbf{M_2}$ custar **y** reais e $\mathbf{M_3}$ custar **z** reais, teremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 111 \\ 2x + 1y + 2z = 88 \\ 3x + 2y + 5z = 181 \end{cases}$$

Escalonando o sistema, teremos:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 111 \\ y + z = 38 \\ z = 20 \end{cases}$$

Assim, $z = 20$, $y = 18$ e $x = 15$.

Logo, $\mathbf{M_1}$ custará R$ 15,00; $\mathbf{M_2}$ custará R$ 18,00 e $\mathbf{M_3}$ custará R$ 20,00.