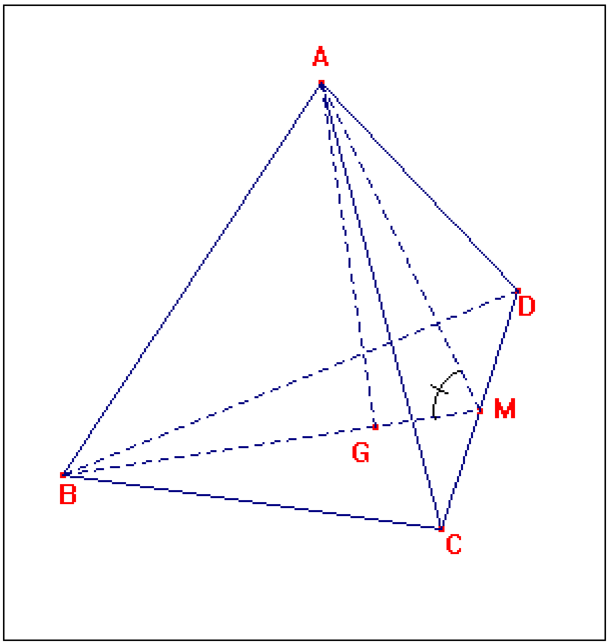
Temos um tetraedro ABCD de aresta *a*. M é ponto médio de CD; AM = altura de uma face, assim como BM.

$AM = BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (altura de um triângulo eqüilátero de lado *a*)

$GM = \frac{1}{3}BM = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

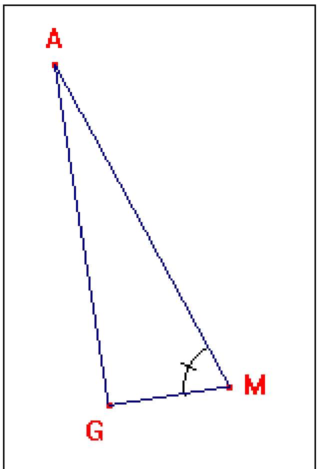


Note que o ângulo $A\hat{M}B$ é também o mesmo ângulo entre as faces BCD e ACD (planos diedros)

(O baricentro de um triângulo é o ponto de intersecção das três medianas; e divide cada mediana em duas partes tais que a maior é o dobro da menor)

A altura do tetraedro ABCD é perpendicular a BM; portanto, o triângulo AGM é retângulo em G e daí, pelo Teorema de Pitágoras, vem:

AG = h, $BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $GM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$



$$AM^2 = GM^2 + AG^2$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2}{36} + h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{27a^2 - 3a^2}{36}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{24a^2}{36}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{2a^2}{3}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{\frac{2a^2}{3}}$$

$$\Rightarrow \ h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\therefore h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

Vamos, agora, calcular o ângulo $A\hat{G}M$:

$$\cos(A\hat{G}M) = \frac{GM}{AM} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \boxed{\cos(A\hat{G}M) = \frac{1}{3}}$$

Conclui-se, então que o ângulo entre os planos BCD e ACD é α = arc cos(1/3) $\cong$ 70,5º
E não 60º, como se pensou.

Outra maneira de obter o cosseno do ângulo $A\hat{M}B$ é aplicar a lei dos cossenos ao triângulo AMB:
$(AB)^2 = (AM)^2 + (BM)^2 - 2.AB.BM.\cos(A\hat{M}B)$.

Sem perda de generalidade, podemos adotar a aresta do tetraedro ABCD igual a 1. Daí, temos:

AB = 1, AM = BM = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Então:

$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\bullet\frac{a\sqrt{3}}{2}\bullet\frac{a\sqrt{3}}{2}\bullet\cos(A\hat{M}B)$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}\bullet\cos(A\hat{M}B)$$

$$\Rightarrow \frac{3a^2}{2}\bullet\cos(A\hat{M}B) = \frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2$$

$\Rightarrow \frac{3a^2}{2}\bullet\cos(A\hat{M}B) = \frac{a^2}{2}$ Dividindo por $\frac{a^2}{2}$, vem

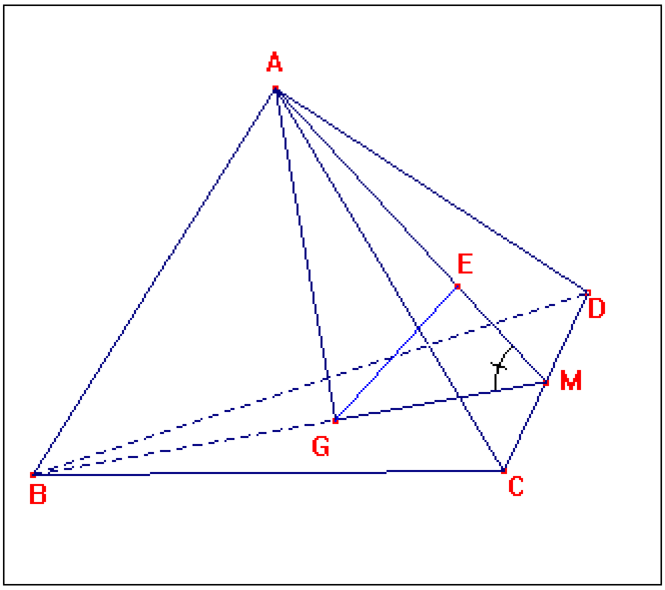
$\Rightarrow 3.\cos(A\hat{M}B) = 1$, donde

$$\boxed{\cos(A\hat{M}B) = \frac{1}{3}}$$

Ou ainda, simplesmente, observando que AGM é retângulo em G, que GM = AM / 3 = h/3, vem facilmente

$$\cos(A\hat{G}M) = \frac{GM}{AM} = \frac{\frac{h}{3}}{h} = \frac{h}{3} \cdot \frac{1}{h} \Rightarrow \cos(A\hat{G}M) = \frac{1}{3}$$

Com esse dado, estamos em condições de calcular a distância* entre os centros de duas faces adjacentes.
*aresta do tetraedro dual ao tetraedro ABCD.



G é baricentro de BCD e E é baricentro de ACD; então, GM=EM=$\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Agora, aplicando a lei dos cossenos ao triângulo EGM, tem-se:

$$GE^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 - 2.\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right).\cos(A\hat{M}G)$$

$$GE^2 = 2 \cdot \frac{3a^2}{36} - 2 \cdot \frac{3a^2}{36} \cdot \frac{1}{3}$$

$$GE^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{18}$$

$$GE^2 = \frac{3a^2}{18} - \frac{a^2}{18}$$

$$GE^2 = \frac{2a^2}{18}$$

$$GE^2 = \frac{a^2}{9} \quad \Rightarrow \quad GE = \sqrt{\frac{a^2}{9}} = \frac{a}{3}$$

$$\therefore \boxed{GE = \frac{a}{3}}$$

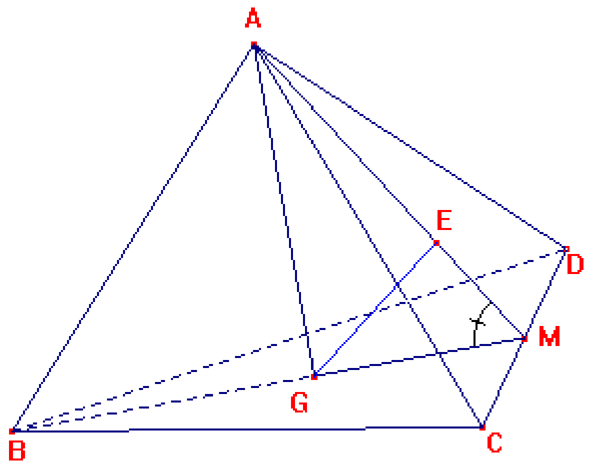
Esta medida corresponde à aresta do poliedro dual do tetraedro regular ABCD de aresta a.

Pode-se chegar ao mesmo resultado por semelhança de triângulos

Prova:
Os triângulos ABM e EGM são isósceles, pois AM = BM e EM = GM. Além disso,

$\measuredangle A\hat{M}B = \measuredangle E\hat{M}G$ (ângulo comum). Consequentemente, $\measuredangle A\hat{B}M = \measuredangle E\hat{G}M$ e $\measuredangle B\hat{A}M = \measuredangle G\hat{E}M$.

Então, esses triângulos, ABM e EGM, são semelhantes. Por isso:



$$\frac{AB}{GE} = \frac{AM}{EM}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{GE} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{GE} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6}{a\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{GE} = 3$$

$$\therefore GE = \frac{a}{3}$$

Este valor é a aresta do tetraedro dual a ABCD.